L.7.11 Sahline | A.S :2009/2010

Devoir de contrôle N°1

Durée: 2.h

Exercice N°1: (4 pts)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse proposée est exacte.
L'exercice consiste à choisir la réponse exacte sans justification.

1) Soit x un réel. le nombre complexe Z défini par $Z=\dfrac{x-i}{x+i}$ a pour module :

a) $\dfrac{x-1}{x+1}$ b) 1 c) $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

2) Soit A, B et C trois points distincts vérifiant : $Z_C - Z_A = 7(Z_B - Z_A)$ alors :

a) A, B et C sont alignés b) AB=7AC c) Le triangle ABC est rectangle en A

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(\pi\sqrt{\dfrac{x}{x^2-2}}) =$

a) 0 b) 1 c) -1

4) Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)	5 ↘	-4	↗ $+\infty$

i) $f(\mathbb{R}) =$

a) $]5,+\infty[$ b) $[-4,+\infty[$ c) $]-4,+\infty[$

ii) l'équation f(x) = 3 admet sur $\mathbb{R}$

a) deux solutions b) une unique solution c) zéro solution

Exercice N°2: (6 pts)

On donne dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A,B et C d'affixes respectives $Z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; $Z_2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $Z=Z_1+Z_2$

1/a) Ecrire sous forme exponentielle Z_1 et Z_2

b) Placer les points A , B et C

c) Vérifier que OACB est un carré

2/ a) Montrer que $Z=(1+i)e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) Déterminer la forme trigonométrique de Z

c) Déduire les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{5\pi}{12})$ et de $\sin(\dfrac{5\pi}{12})$

Exercice N°3: (4 pts)

On donne dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A,B et C d'affixes respectives $Z_1 = e^{i\theta}$; $Z_2 = 2\cos\theta$ et $Z_3 = \overline{Z_1}$ avec $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

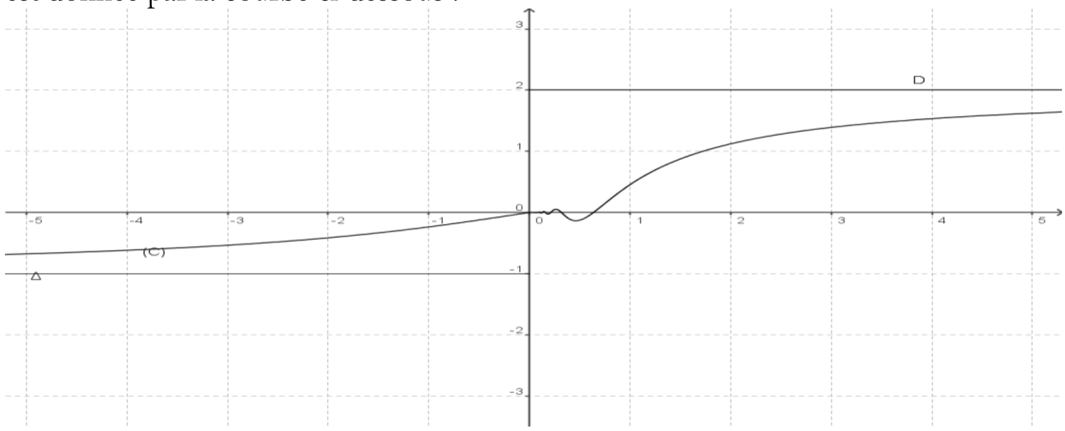
1/ Déterminer l'ensemble des points A lorsque θ décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

2/ Donner la forme exponentielle de $\frac{Z_1}{Z_3}$. En déduire la nature du triangle OAC

3/ Déterminer θ pour que OABC soit un carré

Exercice N°4: (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et dont sa représentation graphique ζ_f dans un repère orthonormé est donnée par la courbe ci-dessous :



La courbe ζ_f admet deux asymptotes horizontales au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$

I- Par une lecture graphique répondre aux questions suivantes :

1/ Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2/ La fonction f est elle prolongeable par continuité en 0 ?
Si oui donner son prolongement par continuité g.

II- On suppose que la fonction f est définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^2\sin(\frac{2}{x})}{1+x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

1/a) Montrer que pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$ on a : $\dfrac{-x^2}{1+x} \le f(x) \le \dfrac{x^2}{1+x}$

b) Déduire la limite de f à droite en 0

2/a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(\frac{2}{x}) = 2$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3/ Soit h la fonction définie sur $\left]-1,+\infty\right[$ par $h(x) = f(-\sqrt{x+1})$

a) Montrer que pour tout x de $\left]-1,+\infty\right[$ on a : $(-\sqrt{x+1}) \in \left]-\infty,0\right[$

b) En déduire que h est continue sur $\left]-1,+\infty\right[$